

Προσέγγιση ελάχιστων τετραγώνων για συναρτήσεις ορισμένες σε
σύνολο σημείων $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

Χαρακτηριστική ιδιότητα του πολυωνύμου ελάχιστων τετραγ.
 q_n^* είναι : $(q_n^*, P) = (f, P) \quad \forall P \in P_n$

Θεωρούμε τη βάση των μονωνίων $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ του P_n
η χαρακτηριστική ιδιότητα δίνει το σύστημα κανονικών
εξισώσεων. Έστω $q_n^*(x) = f_0 + x f_1 + x^2 f_2 + \dots + x^n f_n$.

Τότε, $(q_n^*, x^i) = (f, x^i) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n, x^i) = (f, x^i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^n (x^j, x^i) f_j = (f, x^i) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^m x_k^{(i+j)} \cdot f_j = \sum_{k=1}^m f(x_k) x_k^i$$

$$A \bar{f} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = (x^i, x^j) = \sum_{k=1}^m x_k^{(i+j)}$$

$$\text{και } b_i = (f, x^i) = \sum_{k=1}^m f(x_k) \cdot x_k^i.$$

Ετσι,

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m 1 & \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 & \dots & \sum_{k=1}^m x_k^n \\ \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 & \sum_{k=1}^m x_k^3 & \dots & \sum_{k=1}^m x_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m x_k^n & \sum_{k=1}^m x_k^{n+1} & \sum_{k=1}^m x_k^{n+2} & \dots & \sum_{k=1}^m x_k^{2n} \end{bmatrix}$$

Huykel.

$$b = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m f(x_k) \\ \sum_{k=1}^m f(x_k) x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m f(x_k) x_k^n \end{bmatrix}$$

$$\text{Ετσι, } A\beta = b \Leftrightarrow X^T X \cdot \beta = X^T \hat{f} \text{ οπου } X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix}$$

οπου $X \in \mathbb{R}^{m, n+1}$ οχι τετραγωνικος

και

$$\hat{f} = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)]^T$$

$$\text{Ετσι, } A\beta = b \Leftrightarrow X^T (X\beta - \hat{f}) = 0$$

$$X\beta - \hat{f} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \dots + \beta_n x_1^n - f(x_1) \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 + \dots + \beta_n x_2^n - f(x_2) \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_m + \beta_2 x_m^2 + \dots + \beta_n x_m^n - f(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_n^*(x_1) - f(x_1) \\ q_n^*(x_2) - f(x_2) \\ \vdots \\ q_n^*(x_m) - f(x_m) \end{bmatrix}$$

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε $q_n^* \in P_n$ τέτοιο ώστε $\|f - q_n^*\| \leq \|f - p\|, \forall p \in P_n$ με $p \neq q_n^*$

Αντ. να βρούμε το:

$$\min_{p \in P_n} \|f - q_n^*\| = \min_{\beta \in \mathbb{R}^{n+1}} \|X\beta - \hat{f}\| : \text{Το γραμμικό πρόβλημα ελαχ. τετραγώνων}$$

Άσκηση 9

Να βρεθεί προσέγγιση ελαχ. τετραχ. της x^4 , ορισμένης στο σύνολο σημείων $X_4 = \{-2, -1, 1, 2\}$ στον P_2

ΛΥΣΗ

Θα βρούμε πρώτα τον πίνακα τιμών της x^4

x_i	-2	-1	1	2
f_i	16	1	1	16

Γιαχνόμαστε τον πίνακα :

1	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	$f(x_k)$	$f(x_k)x_k$	$f(x_k)x_k^2$
1	-2	4	-8	16	16	-32	64
1	-1	1	-1	1	1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	4	8	16	16	32	64
4	0	10	0	34	34	0	130

Αρα Hankel

$$\text{Αρα, } A\vec{f} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 0 \\ 130 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f_0 = -4 \\ f_1 = 0 \\ f_2 = 5 \end{cases}$$

$$q_2^*(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 = 5x^2 - 4 \quad \checkmark$$

Για το πόσο σφαλμα "κανονικά" δουλ. το σφάλμα της

$$\|f - q_2^*\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 16 - (5(-2)^2 - 4) \\ 1 - (5(-1)^2 - 4) \\ 1 - (5(1)^2 - 4) \\ 16 - (5(2)^2 - 4) \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 = 0$$

Αρα, βρισκόμαστε στην καλύτερη περίπτωση

Σε αυτή την περίπτωση το q_2^* = πολωνυμιο παρεμβολής της f στα $\{-2, -1, 1, 2\}$ και επίσης είναι και η βση (θα είχαμε ενάλλιο σύνολο σημείων)

Αρα συνάρτηση και τα σημεία συσχετίζονται ως προς το σημείο 0, άρα το πολωνυμιο παρεμβολής θα είναι άρτιο.

2ος τρόπος: Μέσω ορθογώνιων πολωνυμίων (Gram-Schmidt)

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) = x - \frac{-2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} \cdot 1 = x$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{(x^2, P_0)}{(P_0, P_0)} \cdot 1 + \frac{(x^2, P_1)}{(P_1, P_1)} x = x^2 - \frac{4 + 1 + 1 + 4}{1 + 1 + 1 + 1} + \frac{-8 - 1 + 1 + 8}{4 + 1 + 1 + 4} x = x^2 - \frac{5}{2}$$

$$\lambda_0 = \frac{(f, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{16 + 1 + 1 + 16}{4} = \frac{17}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{(f, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{16(-2) + 1(-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 16}{4 + 1 + 1 + 4} = 0 \quad (\text{εχόντων άρτιο πολ.})$$

$$\lambda_2 = \frac{(f, P_2)}{(P_2, P_2)} = \frac{16 \cdot \frac{3}{2} + 1(-\frac{3}{2}) + 1(-\frac{3}{2}) + 16 \cdot \frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \frac{45}{9} = 5$$

Ετσι,

$$q_2^*(x) = \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) = \frac{17}{2} + 5x^2 - \frac{25}{2} = 5x^2 - 4 \quad \checkmark$$

Άσκηση 11 (5ος)

Να βρεθεί προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της $f \in X_5$ στον P_2 όπου $X_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα τιμών:

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0	1	-1	1	-1

Λύση

α' τρόπο (σύστημα κανονικών εξισώσεων):

l	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	$f(x_k)$	$f(x_k)x_k$	$f(x_k)x_k^2$
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	4	8	16	-1	-2	-4
1	3	9	27	81	1	3	9
1	4	16	64	256	-1	-4	-16
5	10	30	100	354	0	-2	-10

$$\text{Άρα, } A\vec{J} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{Gauss} & J_0 = \frac{4}{35} \\ & J_1 = \frac{13}{35} \\ & J_2 = -\frac{1}{7} \end{matrix}$$

$$q_2^*(x) = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{13}{35}x + \frac{4}{35} \quad (\text{Υπάρχει κάποιο σφάλμα})$$

2ος τρόπος (ορθογώνια Πολυώνυμα με Αναδρομική σχέση)

$$P_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x) \quad \text{όπου} \quad \alpha_k = \frac{(x P_k, P_k)}{(P_k, P_k)}$$

και $\beta_k = \frac{(P_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})}, P_0 = 1$.

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) = x - \frac{0+1+2+3+4}{1+1+1+1+1} = x-2$$

Για να βρούμε τα υπολοίπα αγκά να βρούμε το ξ_4 :

$$\alpha_1 = \frac{(x P_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{0(-2)^2 + 1(-1)^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2}{(-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\beta_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{10}{5} = 2.$$

Ετσι,

$$P_2(x) = (x - \alpha_1) P_1(x) - \beta_1 P_0(x) = (x-2)(x-2) - 2 = x^2 - 4x + 2$$

$$\lambda_0 = \frac{(f, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{0-1+1-1+1}{5} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{(f, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{0(-2) + 1(-1) - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$\lambda_2 = \frac{(f, P_2)}{(P_2, P_2)} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 1(-2) + 1(-1) - 1 \cdot 2}{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}$$

Αρα,

$$q_2^*(x) = \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) = -\frac{1}{7}x^2 + \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{5}\right)x + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{13}{35}x + \frac{4}{35}$$

Άσκηση 15

Δίνεται ότι q_1^*, q_2^* είναι οι προσεγγίσεις ελαχ. τετραγ. των συναρτήσεων f_1 και $f_2 \in C[a, b]$ στον P_1 . Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχ. τετραγ. της $\alpha f_1 + \beta f_2$ στον P_1 .

Λύση

οπου α, β : σταθερές
Για τα q_1^*, q_2^* (από χαρακτηριστική ιδιότητα):

$$(f_1 - q_1^*, p) = 0 \quad \text{και} \quad (f_2 - q_2^*, p) = 0 \quad \forall p \in P_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha (f_1 - q_1^*, p) + \beta (f_2 - q_2^*, p) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha (f_1 - q_1^*) + \beta (f_2 - q_2^*), p) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha f_1 + \beta f_2 - (\alpha q_1^* + \beta q_2^*), p) = 0 \quad \forall p \in P_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha q_1^* + \beta q_2^* \in P_n \quad \text{Είναι η προεξέταση ελαχ. τιμής.} \\ \text{ως } \alpha f_1 + \beta f_2 \text{ στον } P_n$$